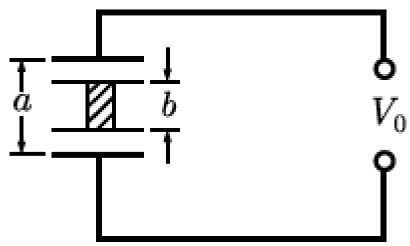
Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Física
FIS1533 Electricidad y Magnetismo
Profesor: Máximo Bañados
Ayudante: Felipe Canales, correo: facanales@uc.cl

Ayudantía 7

Problema 1. La figura de abajo muestra dos capacitores en serie. La sección rígida de largo b entre las placas se puede mover verticalmente. El área de cada placa es $A \gg a^2 > b^2$, de tal forma que se puedan despreciar efectos de borde. Demuestre que la capacitancia del sistema es independiente de la posición en la que se ubica la sección rígida. Si la diferencia de potencial entre las placas del condensador es V_0, ¿Cuál es la energía disipada al remover la sección rígida?



Sea d_1 la distancia que separa la sección de la placa superior, y d_2 la distancia que la separa de placa inferior, podemos notar que:

$$a = d_1 + b + d_2 \quad \Rightarrow \quad a - b = d_1 + d_2$$

Si introducimos una nueva placa conductora entre las originales, el condensador se "divide" en dos condensadores conectados en serie. La capacitancia del nuevo condensador superior es $C_1 = \frac{A\varepsilon_0}{d_1}$, y la del condensador inferior es $C_2 = \frac{A\varepsilon_0}{d_2}$. La capacitancia total de este sistema satisface:

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} = \frac{d_1}{A\varepsilon_0} + \frac{d_2}{A\varepsilon_0} = \frac{d_1 + d_2}{A\varepsilon_0} = \frac{a-b}{A\varepsilon_0}$$

$$C_{eq} = \frac{A\varepsilon_0}{a-b}$$

La energía de ese sistema

$$U = \frac{Q^2}{2C} = \frac{CV^2}{2} = \frac{A\varepsilon_0 {V_0}^2}{2(a-b)}$$

La capacitancia del sistema sin la barra rígida es:

$$C'_{eq} = \frac{A\varepsilon_0}{a}$$

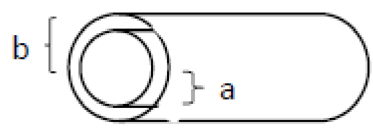
La energía almacenada en esa configuración

$$U' = \frac{C'V^2}{2} = \frac{A\varepsilon_0 {V_0}^2}{2a}$$

La diferencia de energía entre las dos configuraciones

$$\Delta U = U' - U = \frac{A\varepsilon_0 {V_0}^2}{2a} - \frac{A\varepsilon_0 {V_0}^2}{2(a-b)} = \frac{A\varepsilon_0 {V_0}^2}{2}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{a-b}\right) = -\frac{A\varepsilon_0 {V_0}^2 b}{2a(a-b)}$$

Problema 2. Encuentre la capacitancia por unidad de largo de un condensador formado por dos cilindros conductores coaxiales de radios a y b como se muestra en la figura, y la energía almacenada (considere los cilindros muy largos).



Primero por gauss calculamos el campo eléctrico entre los dos cilindros, considerando un cilindro de radio r y largo L:

$$\frac{q}{\varepsilon_0} = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = 2\pi ErL \quad \Rightarrow \quad \vec{E} = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 Lr}\hat{r}$$

Calculamos la diferencia de potencial entre el radio exterior b y el radio interior a:

$$\Delta V = \int_\gamma \vec{E} \cdot d\vec{r} = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 L}\int_a^b \frac{1}{r}dr = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 L}\ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

Luego usando la definición de capacitancia:

$$C = \frac{q}{\Delta V} = \frac{2\pi\varepsilon_0 L}{\ln(b/a)}$$

La capacitancia por unidad de largo

$$\frac{C}{L} = \frac{2\pi\varepsilon_0}{\ln(b/a)}$$

Ahora, para calcular la energía utilizamos la relación entre energía potencial eléctrica y potencial eléctrico en forma diferencial

$$dU = V\,dq$$

Pero de la definición de capacitancia tenemos:

$$V = \frac{q}{C} \quad \Rightarrow \quad dU = \frac{q}{C}dq$$

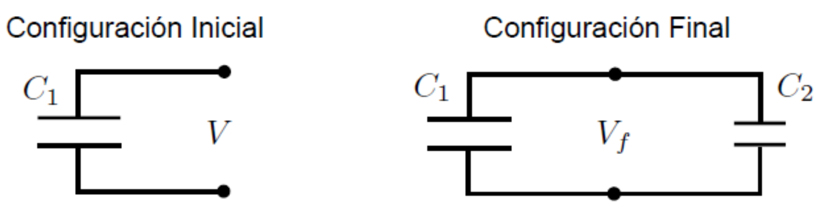
Integrando

$$U = \int dU = \int \frac{q}{C}dq = \frac{q^2}{2C}$$

Reemplazando el valor obtenido anteriormente para C

$$U = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 L}\ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

Problema 3. Un condensador de capacidad $C_1 = 100mF$ se carga a una diferencia de potencial $V = 100V$ (ver configuración inicial). Una vez cargada, se desconecta de la batería y se conecta en paralelo a otro condensador (ver configuración final). Si el voltaje final es $V_f = 30V$, encuentre la capacidad C_2 del segundo condensador.



En primer lugar, calculamos la carga almacenada en el condensador

$$Q_i = C_1 V = 100mF \cdot 100V = 10C$$

Luego se conecta en paralelo ambos condensadores. Por conservación de la carga

$$Q_i = Q_1 + Q_2$$

Donde Q_1 y Q_2 son las cargas almacenadas finales en cada condensador. La diferencia de potencial en ambos condensadores debe ser la misma

$$V_f = \frac{Q_1}{C_1} = \frac{Q_2}{C_2}$$

De esta ecuación tenemos que

$$V_f = \frac{Q_1}{Q_2} = \frac{C_1}{C_2} \quad \Rightarrow \quad \frac{Q_1 + Q_2}{Q_2} = \frac{C_1 + C_2}{C_2}$$

Luego

$$\frac{Q_i}{Q_2} = \frac{C_1 + C_2}{C_2} \quad \Rightarrow \quad V_f = \frac{Q_2}{C_2} = \frac{Q_i}{C_1 + C_2}$$

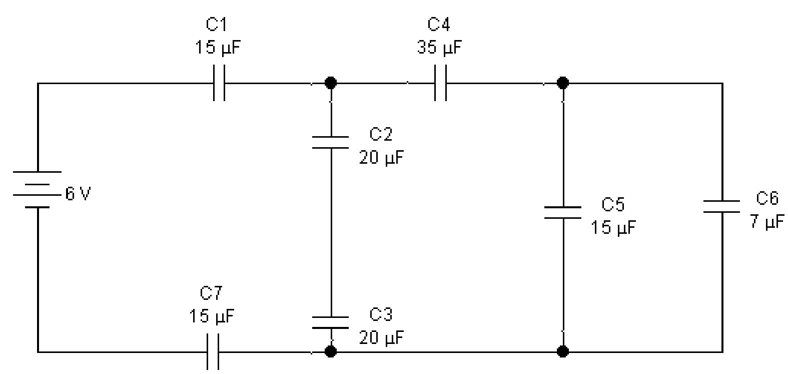
Entonces

$$(C_1 + C_2)V_f = Q_i \quad \Rightarrow \quad C_2 = \frac{Q_i}{V_f} - C_1$$

Reemplazando

$$C_2 = \frac{700}{3} mF$$

Problema 4. Calcule la capacitancia total del sistema y la carga almacenada. ¿Cómo es la capacitancia total con respecto a la menor de las capacitancias del circuito (menor o mayor) ?, ¿Cómo es la capacitancia total con respecto a la mayor de las capacitancias del circuito?



Para calcular la capacitancia total, consideramos partes del circuito para simplificarlo.

Como C5 y C6 están en paralelo, la capacitancia de ese subsistema será:

$$C_7 = C_5 + C_6 = 15\mu F + 7\mu F = 22\mu F$$

Luego la capacitancia de C7 y de C4 estaría en serie, por lo que la capacitancia de ese subsistema sería:

$$\frac{1}{C_8} = \frac{1}{C_7} + \frac{1}{C_4} = \frac{1}{22\mu F} + \frac{1}{35\mu F} = \frac{57}{770\mu F} \quad \Rightarrow \quad C_8 = \frac{770}{57}\mu F$$

Ahora para el subsistema formado por los condensadores C2 y C3

$$\frac{1}{C_9} = \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} = \frac{1}{20\mu F} + \frac{1}{20\mu F} = \frac{1}{10\mu F} \quad \Rightarrow \quad C_9 = 10\mu F$$

C8 y C9 es un subsistema en paralelo, por lo que:

$$C_{10} = C_8 + C_9 = \frac{770}{57}\mu F + 10\mu F = \frac{1340}{57}\mu F$$

Ahora C1, C7 y C10 están en serie

$$\frac{1}{C_T} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_7} + \frac{1}{C_{10}} = \frac{1}{15\mu F} + \frac{1}{15\mu F} + \frac{57}{1340\mu F} = \frac{3535}{20100\mu F} \quad \Rightarrow \quad C_T = \frac{20100}{3535}\mu F \approx 5{,}7\mu F$$

Vemos que la capacitancia del circuito total es menor que cualquiera de las capacitancias que conforman el circuito.
La carga almacenada es:

$$C = \frac{Q}{V} \quad \Rightarrow \quad Q = CV = 5{,}7\mu F \cdot 6V = 34{,}2\mu C$$